VI разред

1. Вера је помножила пет једноцифрених бројева и то множење записала на папиру. Када је изашла из учионице Славољуб је обрисао две цифре у том запису и уместо њих записао друге две цифре. Када се вратила у учионицу Вера је на папиру затекла следећи запис:

$$4\cdot5\cdot4\cdot5\cdot4=2247.$$

Које множење је Вера записала пре Славољубових исправки?

2. У оштроуглом троуглу ABC тачка H је ортоцентар троугла, а тачка O центар описаног круга око троугла ABC. Нека је D тачка таква да је $ADBH$ паралелограм. Докажи да је O средиште дужи CD.

3. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AB = BC$). На полуправим CA, AB и BC означене су редом тачке D, E и F такве да је $AD = AC$, $BE = BA$, $CF = CB$. Израчунај збир углова ADB, BEC и CFA.

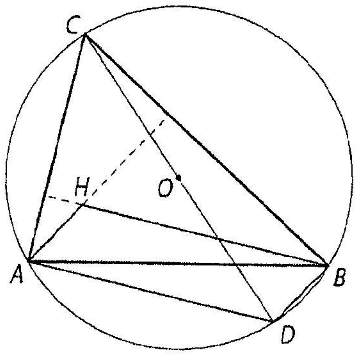
4. На свакој страници троугла дате су по 4 тачке, тако да се ниједна не поклапа са теменом троугла. Колико је троуглова одређено овим тачкама?

5. У математичкој секцији је било 25 чланова. Када се у секцију уписало 7 нових чланова, проценат девојчица у секцији повећао се за 10. Колико је после тога било девојчица у математичкој секцији?

VI разред

1. У Верином запису је постојала бар једна четворка на левој страни (јер су промењене укупно две цифре), па је број на десној страни морао бити паран. Дакле, уместо цифре 7 стајала је нека парна цифра. Следи да је на левој страни промењена највише једна цифра, па је у Верином запису постојала бар једна петица. На основу тога закључујемо да је уместо седмице на десној страни била нула. Друга промењена цифра није могла бити на десној страни, јер би онда лева страна била непромењена, а како је $4\cdot5\cdot4\cdot5\cdot4 = 1600$, на десној страни би све цифре биле промењене. Дакле, друга промењена цифра је на левој страни. Како је у том случају број на десној страни једнак $2240 = 2^6\cdot5\cdot7$, следи да је на левој страни уместо петице била седмица. Дакле, Верин запис је био $4\cdot5\cdot4\cdot7\cdot4 = 2240$ или $4\cdot7\cdot4\cdot5\cdot4 = 2240$.

2. С обзиром да је $ADBH$ паралелограм и да је $BH \perp AC$, то је и $AD \perp AC$, тј. $\measuredangle DAC = 90°$, па је центар круга описаног око правоуглог троугла DAC средиште хипотенузе DC. Аналогно се доказује да је троугао DBC правоугли и да је средиште хипотенузе CD центар круга описаног око тог троугла. С обзиром да пречник CD одређује један круг то се кругови описани око троуглова DAC и BDC међусобно поклапају. Како тачке A, B и C припадају том кругу, то је CD и пречник круга описаног око троугла ABC, па је тачка O средиште дужи CD.



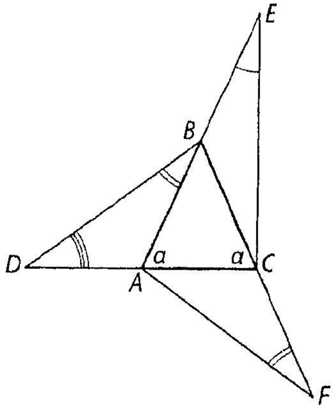
3. Означимо са α угао на основици троугла (слика). Троуглови ADB и ACF су подударни (СУС), одакле је $\measuredangle DBA = \measuredangle AFC$, па је

$$\measuredangle ADB + \measuredangle AFC = \measuredangle ADB + \measuredangle DBA = \alpha. \qquad (1)$$

С друге стране, троугао BEC је једнакокрак, па је

$$\measuredangle BEC = 90° - \alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следи да је тражени збир једнак 90°.



4. Одредимо најпре број троуглова чија два темена припадају једној страници датог троугла. Ту страницу можемо изабрати на 3 начина, а (ако је то страница на којој су тачке P, Q, R, S) два темена на њој можемо изабрати на 6 начина (PQ, PR, PS, QR, QS, RS). Треће теме може бити било које од преосталих 8 тачака, па је број таквих троуглова $3\cdot6\cdot8 = 144$.

Посматрајмо сада троуглове чија сва три темена припадају различитим страницама датог троугла. На свакој од тих страница по једно теме можемо изабрати на 4 начина. Таквих троуглова зато има $4\cdot4\cdot4 = 64$.

Укупан број троуглова је $144 + 64 = 208$.

5. *Решење 1.* Нека је на почетку у секцији било x девојчица и нека је међу новим чановима y девојчица ($y \le 7$). Тада је

$$\frac{x+y}{32}-\frac{x}{25}=\frac{1}{10}.$$

После сређивања добијамо да је $25y - 7x = 80$, тј. $7x = 5\cdot(5y - 16)$, па је број $5\cdot(5y - 16)$ дељив са 7, а самим тим и број $5y - 16$ је дељив са 7. Како је $5y - 16 = 5y + 5 - 21 = 5\cdot(y + 1) - 21$, то $y + 1$ мора да је дељиво са 7, одакле је $y = 6$. Сада добијамо да је $x = 10$, па закључујемо да је у секцији, после уписа нових чланова, било 16 девојчица.

Решење 2. Добијену једначину $25y - 7x = 80$ из решења 1 можемо записати у облику $7x = 25y - 80$, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Јасно је да не може бити $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ (десна страна једначине би била негативна). Провером за $y \in \{4, 5, 6, 7\}$ се целобројна вредност за x добија једино за $y = 6$. Тада је $x = 10$, па је тражени број девојчица 16.