VII разред

1. Одреди све реалне бројеве x, y и z такве да важи:
$$xy + yz + zx = 2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1}.$$

2. Нека је O центар описане кружнице око правилног петоугла $ABCDE$. Докажи да кружница описана око троугла ABO садржи тачке пресека два пара дијагонала петоугла.

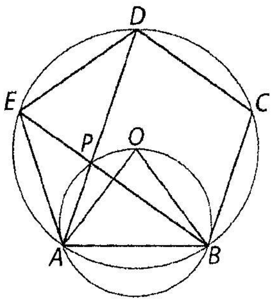
3. На једном тестирању 67 ученика решавало је 6 задатака. Одговори на сва питања су ДА или НЕ. За тачно решен задатак под редним бројем k ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) ученик добија k поена, а за нетачно решен задатак одузима му се k поена.
   а) Докажи да је бар четворо ученика остварило исти број поена на тестирању.
   б) Докажи да је бар двоје ученика имало исте одговоре на сваком од шест задатака.

4. На крацима AB и AC једнакокраког троугла ABC означене су редом тачке K и L тако да је $AK = CL$ и $\measuredangle ALK + \measuredangle LKB = 60°$. Докажи да је $KL = BC$.

5. На две клупе седи по шесторо деце. Сви имају различит број година и број година сваког детета је цео број. Збир и производ броја година деце са једне клупе једнак је збиру, односно производу броја година деце са друге клупе. Најстарије дете има 16 година. Колико година имају деца која седе на истој клупи са њим?

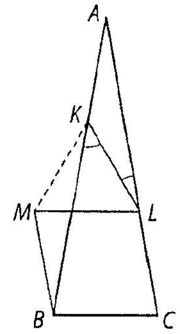
VII разред

1. Једначина је добро дефинисана ако је $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$. Груписањем одговарајућих чланова једначине добијамо
$$x(y - 2\sqrt{y-1}) + y(z - 2\sqrt{z-1}) + z(x - 2\sqrt{x-1}) = 0,$$
$$x((y-1) - 2\sqrt{y-1} + 1) + y((z-1) - 2\sqrt{z-1} + 1) + z((x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1) = 0,$$
$$x(\sqrt{y-1} - 1)^2 + y(\sqrt{z-1} - 1)^2 + z(\sqrt{x-1} - 1)^2 = 0.$$
Како је лева страна увек ненегативна и због услова дефинисаности једначине, важи да изрази у заградама морају бити једнаки 0, одакле је $x = y = z = 2$.



2. Означимо са P пресек дијагонала AD и BE. У правилном петоуглу је $\measuredangle EAB = 108°$ и $\measuredangle AOB = 72°$. $\measuredangle AEB = \measuredangle ABE = \measuredangle EAD = 36°$ (периферијски углови над једнаким тетивама), па је $\measuredangle PAB = \measuredangle EAB - \measuredangle EAD = 72°$. У троуглу ABP је $\measuredangle APB = 180° - (\measuredangle PAB + \measuredangle ABP) = 72°$. Како је $\measuredangle APB = \measuredangle AOB$ то и тачка P припада кружници описаној око троугла AOB. Аналогно показујемо да и пресек дијагонала BD и AC припада кружници описаној око троугла AOB.

3. Коначан број бодова ученика је број облика $\pm1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6$ и припада скупу $\{-21, -19, -17, ..., 17, 19, 21\}$ који има 22 елемента. Ако је сваки од могућих броја бодова остварило највише три ученика, број ученика би био највише 66, одакле следи тврђење а).
Могућих распореда одговора ученика по задацима има колико и одабира предзнака $\pm$, тј. $2^6 = 64 < 67$, па су бар два ученика дала исте одговоре на сваком од шест задатака.



4. Конструишимо паралелограм $BCLM$. Троуглови AKL и BMK су подударни ($BM = LC = AK$, $BK = AL$, $\measuredangle KBM = \measuredangle A$). Следи да је у троуглу LKM: $KL = KM$, $\measuredangle LKM = \measuredangle BKM + \measuredangle LKB = \measuredangle ALK + \measuredangle LKB = 60°$. Према томе, LKM је једнакостраничан троугао, па је $KL = ML = BC$.

5. Означимо са A_1 и A_2 скупове бројева година деце на првој, односно другој клупи (при чему је, рецимо, $16 \in A_1$), а са B означимо (четворочлани скуп) $\{1, 2, ..., 16\} \setminus (A_1 \cup A_2)$. Збир $1 + 2 + ... + 16$ је паран број, а на основу услова задатка (о једнакости збирова), збир елемената скупа $A_1 \cup A_2$ такође је паран, па је паран и збир елемената скупа B.
Сви прости делиоци бројева из скупа $\{1, 2, ..., 16\}$ су 2, 3, 5, 7, 11 и 13, при чему се они у растављању тих бројева на просте чиниоце појављују, редом, 15, 6, 3, 2, 1 и 1 пут. На основу другог услова задатка (о једнакости производа) следи да $11, 13 \in B$. Такође, бар један члан скупа B мора бити паран и тачно један дељив са 5. То не може бити ни 5 ни 15, јер би иначе и четврти члан скупа морао бити непаран (по услову за збир), па у B не би било парног броја. Дакле, $10 \in B$. Но, онда и четврти елемент скупа B мора бити паран, али дељив са 2^2 (да би укупан преостали број двојки био паран). То не може бити 16 (по услову задатка), 8 (опет би преостали број двојки био непаран), а ни 12 (јер би тада укупан преостали број тројки био непаран). Дакле, остаје једина могућност да је $B = \{4, 10, 11, 13\}$, тј. $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16\}$.
За растављање добијеног скупа на два шесточлана дела који задовољавају услове задатка постоје две могућности: $A_1 = \{2, 3, 5, 9, 14, 16\}$ или $A_1 = \{2, 3, 6, 7, 15, 16\}$, што су и решења задатка.