VIII разред

1. Одреди све парове целих бројева (m, n) за које важи $m(m+1) = n(n+2)$.

2. Докажи да је вредност полинома $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ позитивна за свако реално x.

3. Око квадрата $ABCD$ описана је кружница. Нека је EF пречник те кружнице, при чему је E тачка мањег лука AB. Нека су K и L средишта дужи CE и CB, редом. Докажи да се дужи DL и FK секу на дијагонали AC.

4. Седам риболоваца уловило је тачно 100 риба. Међу њима не постоје два која су уловила исти број риба. Докажи да су нека тројица од њих уловила заједно бар 50 риба.

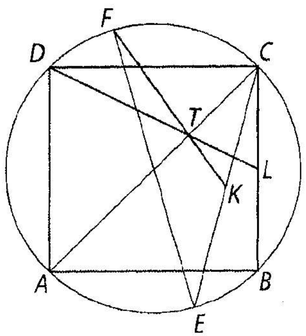
5. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Одреди угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D.

VIII разред

1. Ако помножимо дату једначину са 4 и допунимо изразе до квадрата бинома, добијамо $(2n+2)^2 - (2m+1)^2 = 3$, односно $(2n - 2m + 1)(2n + 2m + 3) = 3$. Разликујемо 4 случаја из којих добијамо решења:
а) $2n - 2m + 1 = 1$, $2n + 2m + 3 = 3$, одакле је $(m, n) = (0, 0)$;
б) $2n - 2m + 1 = 3$, $2n + 2m + 3 = 1$, одакле је $(m, n) = (-1, 0)$;
в) $2n - 2m + 1 = -1$, $2n + 2m + 3 = -3$, одакле је $(m, n) = (-1, -2)$;
г) $2n - 2m + 1 = -3$, $2n + 2m + 3 = -1$, одакле је $(m, n) = (0, -2)$.

2. Разликујемо три случаја: а) $x \le 0$; б) $0 < x < 1$; в) $x \ge 1$.
а) За $x \le 0$ важи $x^{12} \ge 0$, $-x^9 \ge 0$, $x^4 \ge 0$ и $-x \ge 0$, па је
$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + (-x^9) + x^4 + (-x) + 1 \ge 1.$$
б) Важи да је $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x)$. Како је за $0 < x < 1$:
$$1 - x^5 > 0 \quad \text{и} \quad 1 - x > 0$$
то је вредност полинома већа од 0.
в) Како је $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1$, то за $x \ge 1$ важи да је $x^3 - 1 \ge 0$, па је вредност полинома већа или једнака 1.
Дакле, вредност датог полинома је увек позитивна.

3. Нека је T тачка пресека дужи AC и DL. На основу Талесове теореме, троуглови TDA и TLC су слични, са коефицијентом сличности 2. Тачка T дели сваку од дужи AC и DL у односу $2:1$.
С друге стране, имамо да је $DF = BE = 2 \cdot LK$, $DF \parallel BE \parallel LK$ и $\measuredangle FDT = \measuredangle KLT$. Зато тачка пресека дужи DL и FK дели сваку од тих дужи у односу $2:1$. Следи да се та тачка пресека поклапа са тачком T, одакле следи тврђење.



4. Нумеришимо риболовце бројевима од 1 до 7, тако да је од два риболовца већим бројем нумерисан онај који је уловио мање риба. Последњи (седми) риболовац уловио је највише 11 риба (јер је $12 + 13 + \ldots + 18 = 105$). Претпоставимо да су четири последња уловила више од 50 риба. Како је $11 + 12 + 13 + 14 = 50$, следи да је у том случају четврти уловио бар 15 риба. Но, онда је улов трећег бар 16, другог бар 17 и првог бар 18, па је укупан улов свих риболоваца већи од $50 + 16 + 17 + 18 = 101$, што је немогуће. Дакле, четири последња су уловила заједно највише 50 риба, што значи да су прва тројица уловила бар 50 риба.

5. *Решење 1.* Права AD нормална је на раван DD_1C_1C. Права AD припада равни AB_1C_1D. Следи да је раван AB_1C_1D нормална на раван DD_1C_1C. Праве DC_1 и D_1C су узајамно нормалне и налазе се у равни DD_1C_1C која је нормална на раван AB_1C_1D. Следи да је права DC_1 нормална на раван AB_1C_1D. Како се права DC_1 налази у равни ACD_1 то су равни ACD_1 и AB_1C_1D узајамно нормалне, тј. заклапају угао од 90°.
Решење 2. Права D_1C нормална је на праву DC_1 (дијагонала квадрата) и на праву PQ која спаја средишта квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (јер је PQ паралелна са BC), па је нормална и на раван AB_1C_1D која садржи те две праве. Даље се закључује као у претходном решењу.
Решење 3. Нека је страница коцке дужине a. Приметимо да је $B_1A = B_1C = B_1D_1 = a\sqrt{2}$, као и $DA = DC = DD_1 = a$. Нека је тачка O подножје нормале из B_1 на раван троугла ACD_1. Из подударности троуглова AOB_1, COB_1, D_1OB_1 (ССУ) добијамо $OA = OC = OD_1$, па је O заправо центар једнакостраничног троугла ACD_1. На исти начин добијамо да је подножје нормале из D на раван ACD_1 такође центар O тог троугла. Дакле, права B_1D је нормална на раван ACD_1 и продире је у поменутој тачки O. Како права B_1D очигледно припада равни AB_1C_1D, важи да је и раван AB_1C_1D нормална на раван ACD_1. Тражени угао је 90°.